Compétition interclasses de 3^{e} & 2de

Mathématiques sans frontières

ACADEMIE DE STRASBOURG

Institut de Recherche de l'Enseignement des Mathématiques
Inspection Pédagogique Régionale de Mathématiques

EPREUVE DU 13 MARS 2001

- ⌘ **Toute solution même partielle sera examinée.**
- ⌘ **Le soin sera pris en compte.**
- ⌘ **Ne rendre qu'une feuille-réponse par exercice.**

exercice 1 — 7 points

A ton tour

Solution à rédiger en allemand, anglais, espagnol ou italien en un minimum de 30 mots.

Nick fans out in front of Francis a deck of twenty-five cards all of which are different. Nick then asks Francis to pick one without showing its face.

Nick then sets out the first five cards in a line and places the next five on top of the first five until he gets five five-card packs.

Francis is then asked to point at the pack that includes the card he first picked. The next thing Nick does is to collect the five packs, placing the one Francis pointed at in the middle of the full pack. He then deals out the cards as before until he gets the five five-card packs again.

For the second time, Francis is asked to point at the pack that includes the card he had originally picked. Nick is then able to show him which card it was.

Explain the trick.

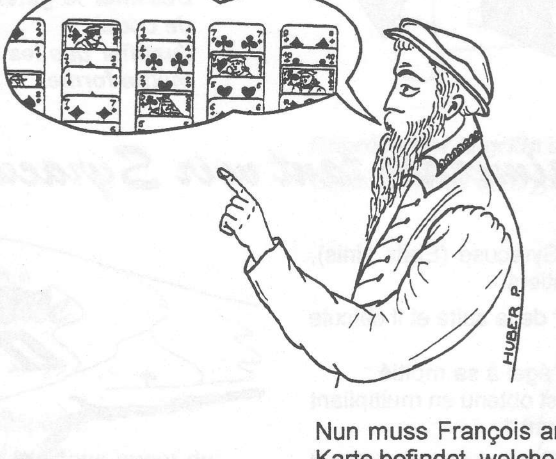
Nicolás le enseña a Francisco un abanico de 25 cartas, todas diferentes. Le pide que escoja una sin enseñársela.

Alinea las 5 primeras cartas de la baraja, luego coloca las 5 siguientes sobre las precedentes y así sucesivamente hasta formar 5 pilas de 5 cartas.

Francisco debe señalar la pila donde está la carta que ha escogido. Nicolás recoge las 5 pilas, colocando la que ha señalado Francisco en el medio de la baraja. Luego reparte las cartas de la misma manera para volver a formar 5 pilas de 5 cartas.

Francisco señala de nuevo la pila donde se encuentra ahora la carta escogida. Entonces, Nicolás le enseña esta carta.

Explicar este truco.



Nicola mostra a Francesco un ventaglio di 25 carte tutte diverse e gli chiede di sceglierne una senza mostrargliela.

Dispone le prime 5 carte in riga, poi altre 5 sulle precedenti in successione e così di seguito fino ad ottenere 5 file di 5 carte ognuna.

Francesco deve indicare la fila in cui si trova la carta scelta; Nicola raccoglie ogni fila ponendo le carte di quella indicata da Francesco al centro del mazzo. Poi ridistribuisce le carte nello stesso modo per formare altre 5 file di 5 carte.

Francesco indica di nuovo la fila in cui si trova ora la carta scelta in precedenza. A questo punto Nicola è in grado di rivelare questa carta.

Spiegare il procedimento.

Nicolas zeigt François einen Fächer aus 25 Karten, die alle verschieden sind. Er bittet ihn, eine Karte auszuwählen, ohne sie zu zeigen.

Nun legt er die ersten fünf Karten offen in eine Reihe. Die nächsten fünf Karten legt er darüber, und so fährt er fort, bis fünf Stapel aus je fünf Karten entstanden sind.

Nun muss François angeben, in welchem Stapel sich die Karte befindet, welche er ausgewählt hat. Nicolas sammelt die fünf Stapel ein, wobei er den von François bezeichneten Stapel in der Mitte des Pakets einordnet. Danach teilt er die Karten in gleicher Weise aus, so dass wieder fünf Stapel zu je fünf Karten entstehen.

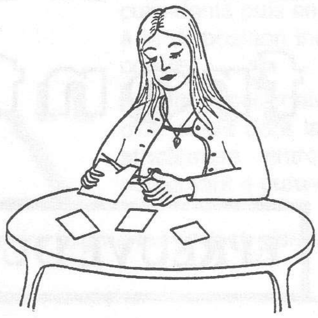
François gibt erneut den Stapel an, in welchem sich seine Karte befindet, worauf Nicolas ihm diese Karte zeigt.

Erkläre diesen Trick.

D'après Nicolas CHUQUET (1445 – 1500).

exercice 2 — 5 points

Famille de carrés



Après avoir tracé un carré de 6 cm de côté, Pierre demande à sa fille Nathalie de partager celui-ci en 9 morceaux carrés de côtés mesurés par un nombre entier de centimètres.

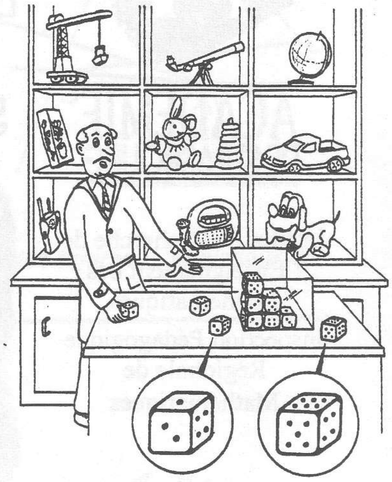
Nathalie trouve rapidement un partage et se demande s'il y en a d'autres.

Deux partages constitués des mêmes carrés mais placés différemment sont considérés comme identiques.

Représenter toutes les solutions possibles.

exercice 4 — 5 points

Le plein de points



Monsieur Victor vend des dés dans son magasin de jouets. Il peut ranger exactement 60 dés dans une boîte transparente de forme parallélépipédique : 5 dans le sens de la longueur, 4 dans le sens de la largeur et 3 dans le sens de la hauteur.

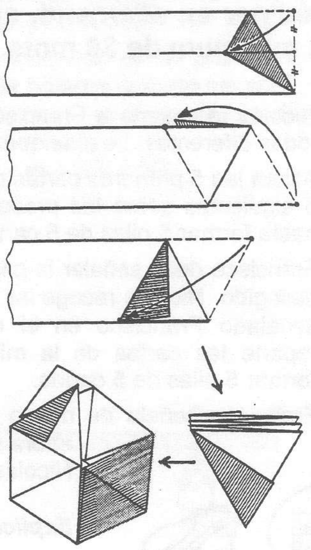
Il remplit la boîte de sorte que la somme des points visibles sur les 6 faces de la boîte soit maximale.

Quelle est cette somme ? Expliquer.

exercice 3 — 7 points

Hexagami

Dans un livre d'origami on trouve le pliage décrit ci-contre, réalisé à partir d'une bande de papier rectangulaire de $12\sqrt{3}$ cm sur 3,6 cm et qui permet d'obtenir un hexagone régulier. Le recto et le verso de la bande sont de deux couleurs différentes.



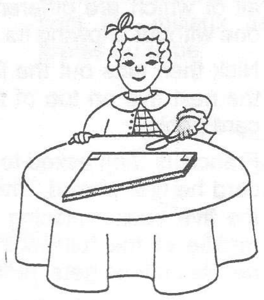
Réaliser puis coller l'hexagone sur la feuille-réponse.
Calculer son aire.

exercice 5 — 7 points

Aire coupable

Marie-Odile et Julie doivent se partager équitablement le reste d'un gâteau. Ce reste est un trapèze rectangle dont les bases mesurent 1 dm et 3 dm et la hauteur 4 dm.

Julie exige que les parts aient la même aire et la même forme. Marie-Odile trouve la solution en un seul coup de couteau rectiligne.



Dessiner le gâteau à l'échelle 1/5 puis marquer le trait de coupe.
Justifier que les deux morceaux ont la même aire et la même forme.

exercice 6 — 5 points

J'aimerais tant voir Syracuse ...

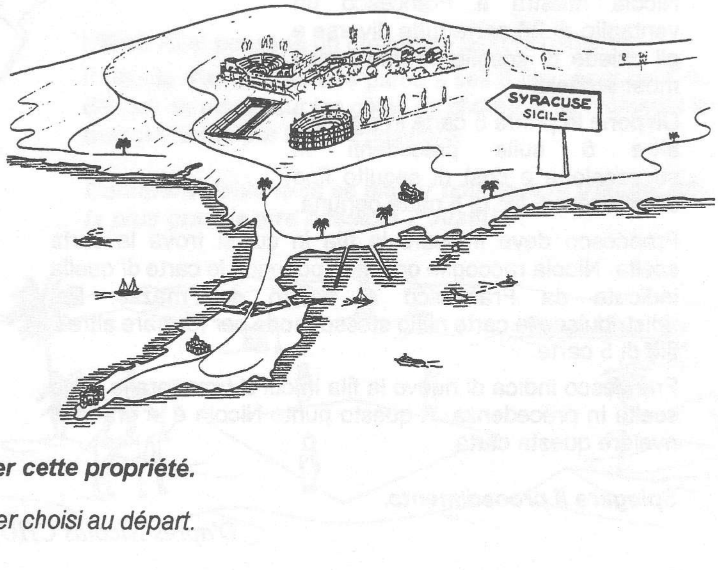
John, étudiant à l'université de Syracuse (Etats Unis), calcule des suites de nombres entiers.

Il choisit d'abord le premier entier de la suite et il calcule le suivant avec ce programme :
- si l'entier est pair, le suivant est égal à sa moitié ;
- si l'entier est impair, le suivant est obtenu en multipliant cet entier impair par 3 et en ajoutant 1.

Puis il applique à nouveau ce programme au résultat et ainsi de suite.

Il choisit 1 pour entier de départ et obtient la première suite. Ensuite il choisit 2, puis 3 et ainsi de suite jusqu'à 25. Il obtient ainsi 25 suites.

Il constate une étonnante propriété vérifiée par ces 25 suites.



Présenter astucieusement les calculs de John et énoncer cette propriété.

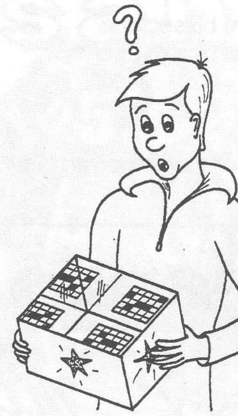
Cette propriété n'a pas encore été démontrée pour tout entier choisi au départ.

exercice 7 — 7 points

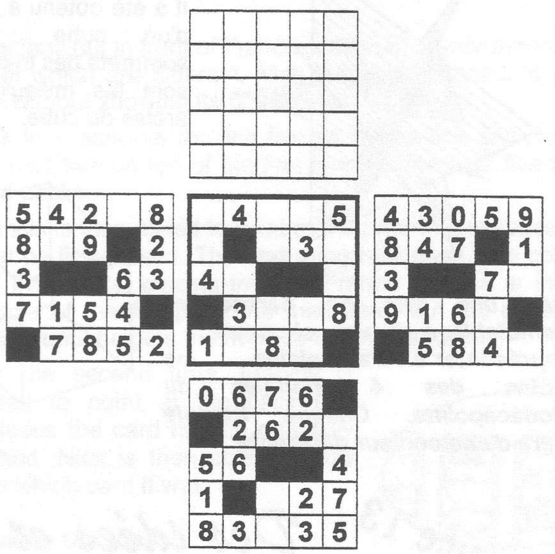
Oh mon beau miroir . . .

Autour de la grille centrale se trouvent 4 miroirs magiques.

Ces miroirs reflètent parfaitement les cases noires. Pour chaque nombre de la grille centrale, le reflet est inchangé par 2 miroirs alors que les 2 autres miroirs changent le reflet : l'un réfléchit l'entier qui le précède et l'autre l'entier qui le suit. Le rôle des miroirs peut changer selon la case de la grille centrale.



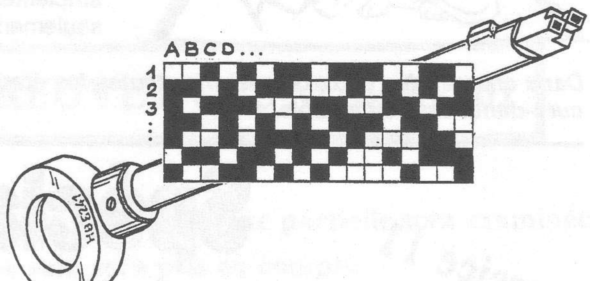
Reconstituer sur la feuille de réponse l'image aperçue sur le miroir du haut.



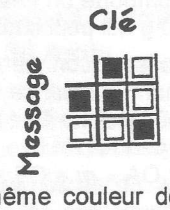
exercice 8 — 5 points

www.cache.cache

Pour communiquer sur Internet, Alice et Robert codent ou décodent leur message avec la clé suivante formée de pixels noirs ou blancs.

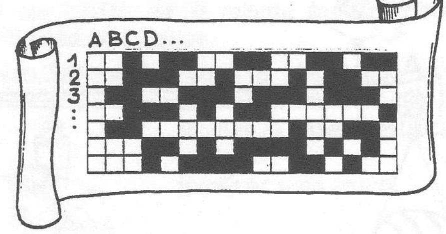


Pour coder ou décoder le message qui a les mêmes dimensions que la clé, on le pose sur la clé et, pour chaque couple de pixels de mêmes coordonnées, on applique l'opération suivante :



Deux pixels de même couleur donnent un pixel noir et deux pixels de couleurs différentes donnent un pixel blanc.

Voici le message codé envoyé par Robert à Alice.



Représenter la grille décodée. Quel est le message ?

Cette méthode de cryptage est réellement utilisée.

exercice 9 — 7 points

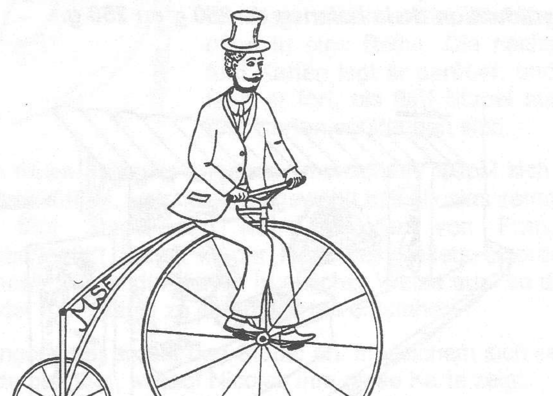
Cyclopède

Benjamin observe Emilien faire du vélocipède.

Il s'imagine la trajectoire du point A de la roue avant du vélocipède lorsque celle-ci effectue un tour et demi sans glisser.

La roue a 150 cm de diamètre. Au départ le point A est en contact avec le sol.

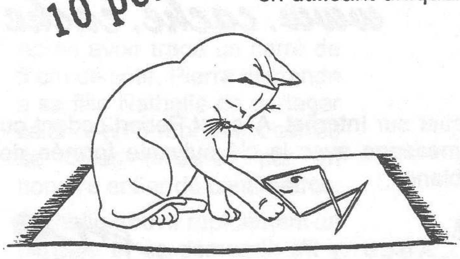
A l'échelle 1/30, représenter la position de la roue et du point A tous les huitièmes de tour. Puis tracer la trajectoire du point A.



exercice 10
10 points

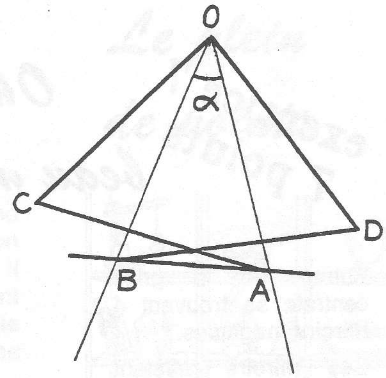
La curedentrice

Eric a une méthode pour matérialiser avec un cure-dent la bissectrice d'un angle α de mesure strictement inférieure à 60° en utilisant uniquement 5 cure-dents de même longueur.



Pour un angle donné, il place d'abord 3 cure-dents puis en déplace 2 pour aboutir à la disposition indiquée par la figure ci-contre.

Il sait aussi matérialiser la bissectrice d'un angle dont la mesure est comprise strictement entre 60° et 120° avec seulement 4 cure-dents.



Dans chacun des deux cas, décrire toutes les étapes des manipulations en illustrant par des figures. L'épaisseur des cure-dents est négligeable.

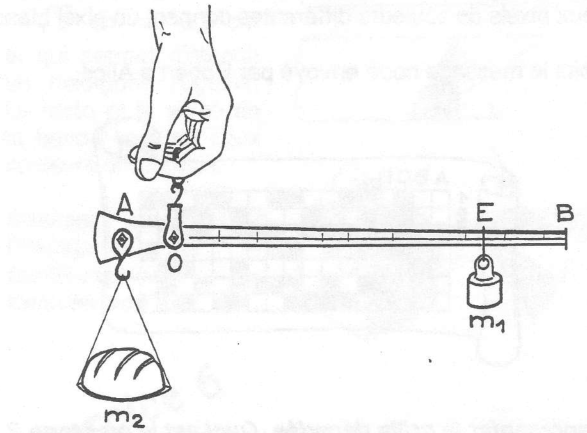
Spécial Seconde

exercice 11
5 points

Quel fléau ?

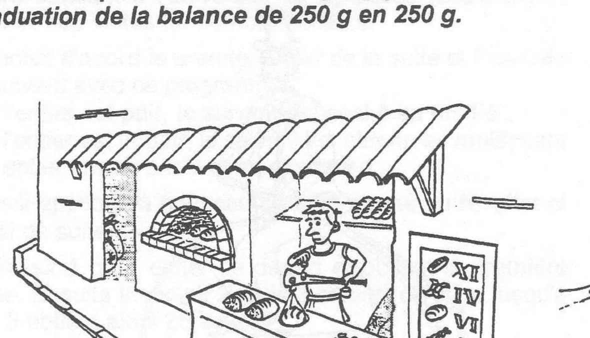
La balance romaine comporte un fléau gradué entre O et B et une masse de 500 g qui peut coulisser sur [OB].

Pour mesurer une masse inconnue de ***m*** grammes, on l'accroche en A et, tenant la balance suspendue en O, on déplace la masse de 500 g entre O et B jusqu'à l'équilibre : la masse est alors suspendue en E.
On a alors la relation : $OA \times m = OE \times 500$.



On sait que AB = 24 cm.
Avec m = 2 kg la balance est à l'équilibre si AE = 20 cm.

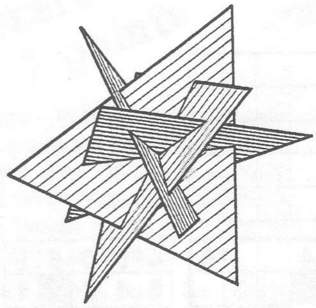
Calculer la position de O sur [AB] puis construire la graduation de la balance de 250 g en 250 g.



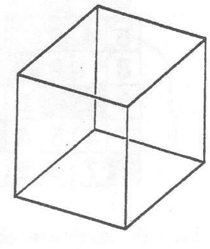
exercice 12
7 points

Mise en boîte

Le dodécapointe représenté ci-dessous est constitué de 4 triangles équilatéraux de même côté et deux à deux sécants.



Il a été obtenu à partir d'un cube : les sommets des triangles sont les milieux des arêtes du cube.



Sur une vue en perspective semblable à la vue ci-contre, représenter en traits pleins les côtés des 4 triangles du dodécapointe. Chaque triangle sera d'une couleur différente.

exercice 13
10 points

Des idées et du pétrole

L'Emir Abel possède un champ de pétrole carré.

Il décide d'en donner une partie à ses 3 fils : pour cela, ils doivent se placer sur les côtés du champ et ils recevront le triangle formé par leurs 3 positions.

Comment doivent-ils se placer pour que le triangle ait la plus grande aire possible ? Justifier.