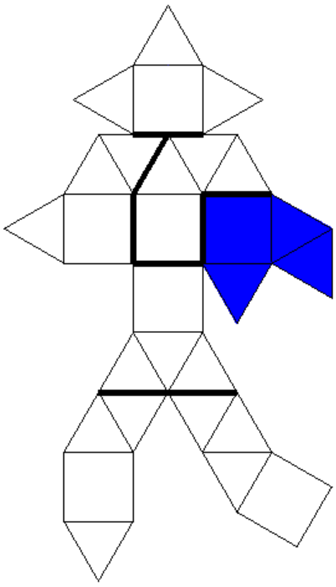
Eléments de solutions pour un corrigé de l'épreuve de découverte 2007

Exercice 1 : Moitié vide ou moitié pleine ?

Il suffit de repérer le niveau du liquide : sur la figure, il coïncide avec le « E » de l'étiquette.
On renverse alors la bouteille pour échanger les deux composants de son contenu : l'air et le liquide. **Si le niveau du liquide se trouve en-dessous du repère, c'est qu'il y a plus d'air et donc moins d' ½ litre de liquide, s'il se trouve au-dessus, c'est qu'il y a plus d' ½ litre**.

Exercice 2 : Trois pour un

Voici l'unique solution.



La pièce manquante est en bleu.

Exercice 3 : Recyclage

Une année non bissextile compte 365 jours. $\boxed{365 = 52 \times 7 + 1}$

Le calendrier de 2007 sera décalé d'1 jour par rapport à celui de 2006. Quand une année est bissextile, le décalage est de 2 jours à partir du 1er mars. Ainsi le 1er janvier 2006 était un dimanche. En 2007, ce sera un lundi, en 2008 un mardi, en 2009 un jeudi, …, en 2012 un dimanche. Mais 2012 est bissextile, l'agenda ne pourra donc pas servir au-delà du 28 février.
Il faudra attendre 2017 pour retrouver une année non bissextile commençant par un dimanche.

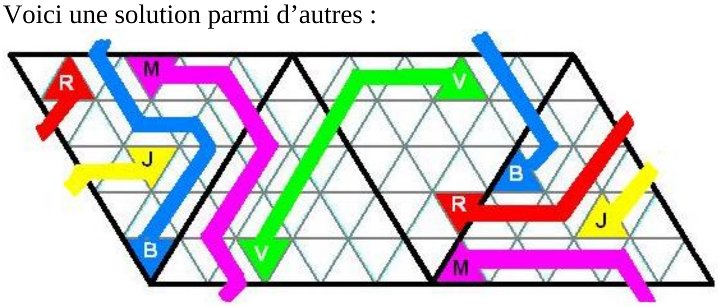
Exercice 4 : Il y a du neuf

$$10^{2006}-2006=(10^{2006}-1)-2005=\underbrace{9999...99999}_{2006\text{ chiffres }9}-2005=\underbrace{9999...999}_{2002\text{ chiffres }9}7994\ .$$

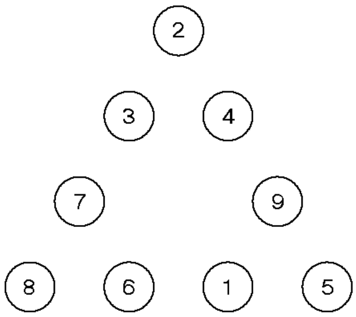
La somme des chiffres est donc : 2002 × 9 + 7 + 9 + 9 + 4 = **18 047**.

Exercice 5 : Chacun sa route

Voici une solution parmi d'autres :



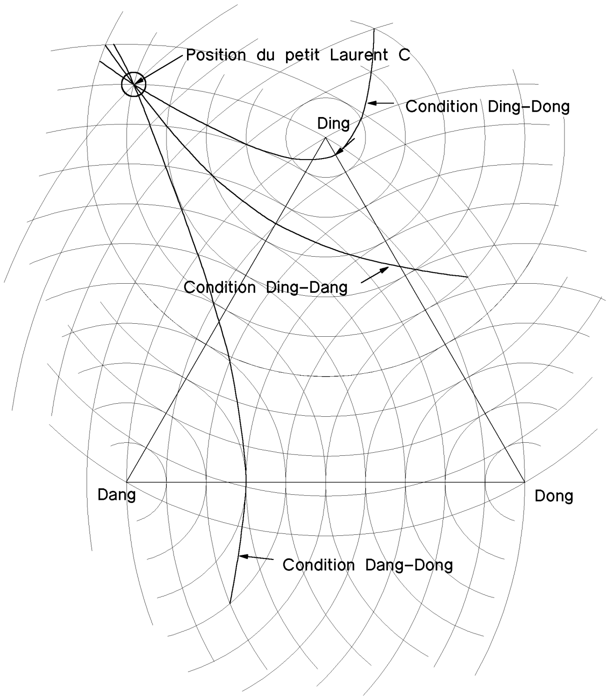
Exercice 6 : Mathilde a les jetons



Les autres triangles-solutions présentent les mêmes alignements (de 4 nombres).

Exercice 7 : Au cœur de la nuit

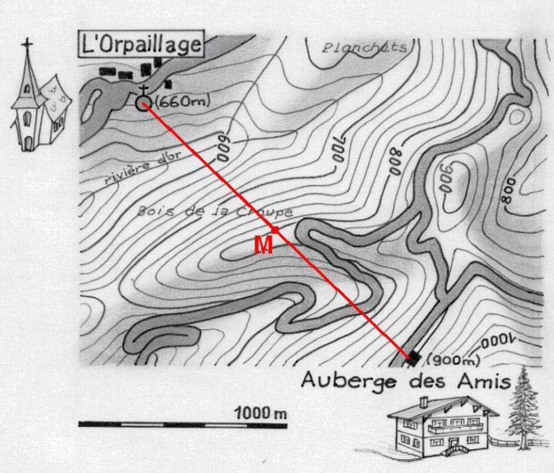
On pourra compléter le réseau de cercles amorcé sur la figure de l'énoncé. **Le petit Laurent se trouve à une intersection d'hyperboles, tout près des cercles Ding +5, Dang +10 et Dong +14 qui sont quasiment concourants**.



Exercice 8 : Renversants

Voici les 24 nombres renversants vérifiant les règles de l'énoncé :
60009 ; 60809 ; 66099 ; 66899 ; 68089 ; 68889 ; 69069 ; 69869
80008 ; 80808 ; 86098 ; 86898 ; 88088 ; 88888 ; 89068 ; 89868
90006 ; 90806 ; 96096 ; 96896 ; 98086 ; 98886 ; 99066 ; 99866.

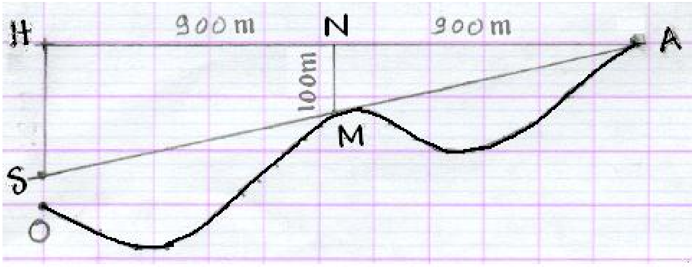
Exercice 9 : Point de vue



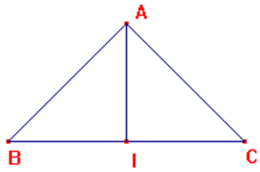
Soient A la position de l'observateur à l'Auberge des Amis, M le point situé dans la direction du regard vers le village, à l'altitude 800 m sur la crête de la Croupe, H le point d'altitude 900m situé à la verticale de la chapelle, N le point situé à l'altitude 900 m à la verticale de M, et S l'intersection de la ligne du regard (AM) avec la verticale (OH) de la chapelle.

Le théorème de Thalès ou le théorème des milieux donnent alors HS = 200m. Or OH = 900-660 = 240 m, donc OS = 40 m.

On ne peut donc pas voir le clocher de la chapelle de l'Orpaillage depuis l'Auberge des Amis, à moins qu'il ne soit haut de plus de 40 m, ce qui est peu plausible.

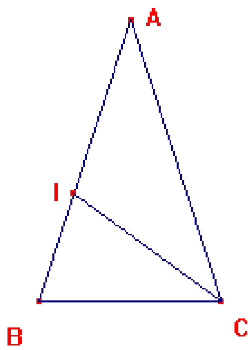


Exercice 10 : Triangles bisocèles



Premier cas :
La bissectrice (AI) est issue du sommet principal A du triangle isocèle BAC, les 2 triangles BAI et CAI ainsi formés sont isométriques et rectangles. S'ils sont isocèles alors l'angle $\widehat{BAC}$ mesure 90°. **Le triangle initial est rectangle isocèle.**

Deuxième cas : la bissectrice (CI) est issue du sommet C du triangle isocèle ABC de sommet principal A. Si le triangle BIC est isocèle son sommet principal ne peut-être que C. En appelant a la mesure de l'angle $\widehat{ICB}$ on obtient dans ce triangle ICB
5a = 180° et a = 36°. Le triangle isocèle ABC a ses 2 angles égaux qui mesurent 72°.
L'angle $\widehat{BAC}$ mesure donc 36° et le triangle IAC est aussi isocèle de sommet principal I.
L'angle $\widehat{AIC}$ mesure 108°.
Le deuxième triangle isocèle recherché a son sommet principal qui mesure 36° et les angles égaux qui mesurent 72°.



Exercice 11 : Sommes de carrés

Soit n le côté du 3ème carré. Les 5 carrés initiaux ont donc pour aires respectives :
$(n-2)^2, (n-1)^2, n^2, (n+1)^2$ et $(n+2)^2$.
En égalant les aires des deux grands carrés, on obtient successivement :
$(n-2)^2+(n-1)^2+n^2=(n+1)^2+(n+2)^2$, $n^2-4n+4+n^2-2n+1+n^2=n^2+2n+1+n^2+4n+4$,
$n^2-12n=0$, puis $n(n-12)=0$. Or n>0, donc n = 12. **Le côté du 3ème carré est donc 12.**

Exercice 12 : Problème existentiel

Si le triangle existe alors : (2+x) + (1+2x) > (12–x) et (2+x) + (12–x) > (1+2x). Les solutions de cette double inégalité sont tous les réels de l'intervalle]2,25 ; 6,5[. L'inégalité (1+2x) + (12–x) > (2+x) est toujours vraie. Réciproquement pour tout réel de l'intervalle]2,25 ; 6,5[, les trois nombres (2+x), (1+2x) et (12–x) sont positifs ce qui assure l'existence du triangle. Les solutions sont **tous les réels de l'intervalle]2,25 ; 6,5[**.

Exercice 13 : Croix de Malte

AO=AC=BD= $4\sqrt{2}$ et AC+BD=AD+BC. Donc BC= $8(\sqrt{2}-1)$.

Le triangle ABL est rectangle isocèle. Alors AB=AD–BD= $8-4\sqrt{2}$ et BL=AB $\sqrt{2}$ = 8 $\sqrt{2}$ – 8 = BC. En utilisant les symétries de la figure on obtient l'égalité des huit côtés de l'octogone BCEFHIKL.

Le triangle ABL étant rectangle et isocèle, l'angle $\widehat{ABL}$ mesure 45°.

Alors l'angle $\widehat{LBC}$ mesure 135°. De même, on peut montrer que tous les angles de l'octogone mesurent 135°.
Cet octogone a 8 côtés égaux et 8 angles égaux, donc il est régulier.