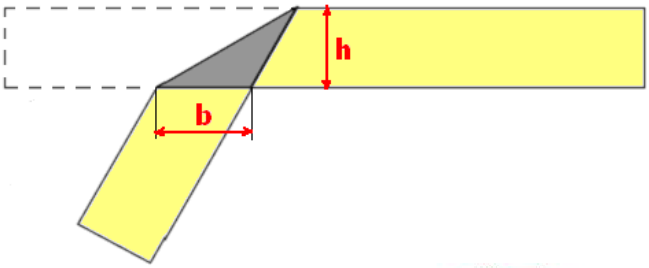
Eléments de solutions pour un corrigé de l'épreuve de décembre 2008

Exercice 1 : Peut-être, 7 points.

De 000 à 999, il y a 1000 codes possibles pour ce cadenas.
30 min = 1800 s donc, à raison de 2 secondes par essai, Chantal peut tester 900 codes.
La probabilité de trouver le bon code en moins d'une demi-heure est donc de 90%.

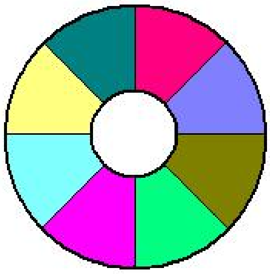
Exercice 2 : C'est plié ! 5 points.



L'aire du triangle est $\frac{b\times h}{2}$ (voir figure)

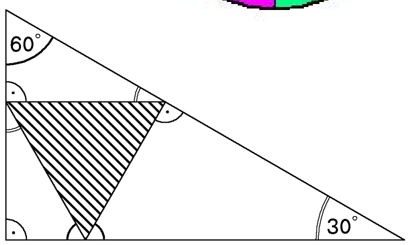
La hauteur de ce triangle est constante et égale à la largeur de la bande de papier.
Son aire sera donc minimale quand la base est minimale. Elle est alors égale à la largeur de la bande de papier ; le triangle minimal est rectangle et isocèle.

Exercice 3 : Logo neuf, 7 points.

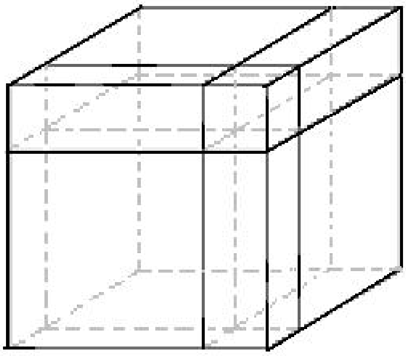


Le disque central et les 8 secteurs ont des aires égales.
L'aire totale du grand disque égale 9 fois l'aire du disque central.
Son rayon est donc le triple du rayon du disque central, soit 6 cm.

Exercice 4 : Un pour trois, 5 points.



Ci-contre, l'unique solution de ce problème, modulo symétries et rotations.
(La preuve de l'unicité n'est pas demandée)



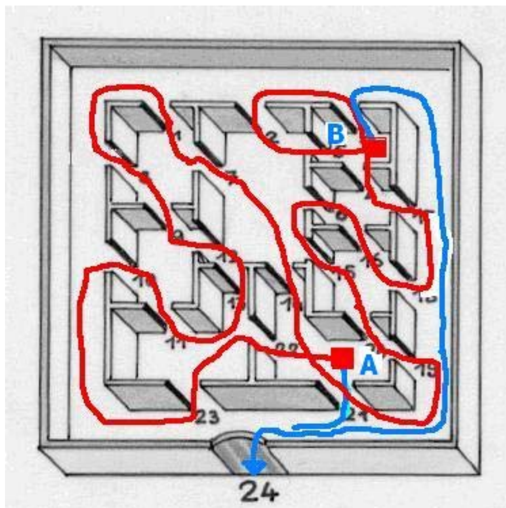
Exercice 5 : Expression cubiste, 7 points.

Voici une vue en perspective de l'assemblage.
On peut y voir sept des huit pièces qui le constituent :
Le cube d'arête a est caché.

Cet assemblage illustre l'égalité

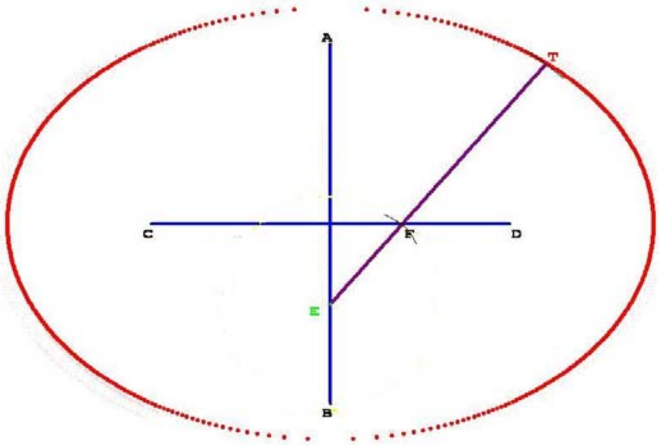
$$\boxed{(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}.$$

Exercice 6 : Carrécéral, 5 points



Les pièces ayant un nombre pair de portes ne pourront pas être au départ ou à l'arrivée du circuit.
Il y a deux pièces ayant un nombre impair de portes. Il faut se rendre dans l'une d'elles, qu'on nommera A, l'autre étant nommée B. Là on réinitialise.
On parcourt alors un circuit passant par toutes les portes ouvertes qui se termine nécessairement dans la pièce B où on se trouve enfermé. La porte n° 24 s'ouvre.
Il suffit alors de réinitialiser pour sortir (voir exemple ci-contre.)
Le couloir peut aussi être considéré comme une pièce.

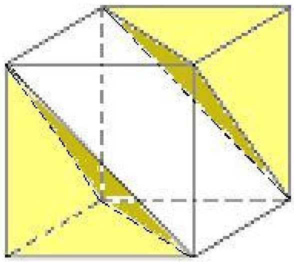
Exercice 7 : En coulisses

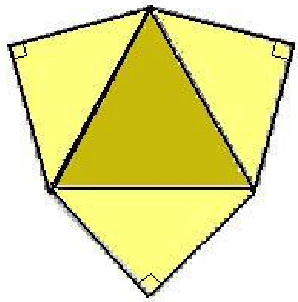


Un tracé point par point de la trajectoire de F fait apparaître l'ovale ci-contre.

Une étude analytique, évidemment non demandée ici, donne l'équation: $\boldsymbol{4x^2 + 9y^2 = 324}$*.*
Il s'agit donc d'une ellipse.

Exercice 8 : Trois pour un, 5 points





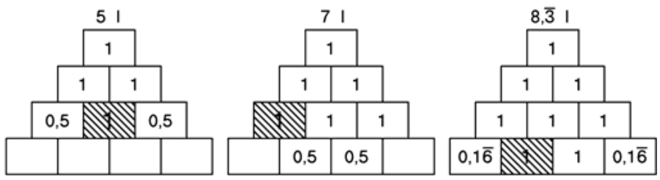
Voici une vue des deux pyramides qui complètent l'antiprisme dont le patron est donné.
A droite, un patron possible pour ces pyramides.

Exercice 9 : Tic-tac, tac-tic, 7 points.

Pour chaque heure qui passe, la première horloge gagne deux minutes et la deuxième en perd une. La différence des affichages augmente donc de 3 minutes. L'horloge rapide rattrapera la plus lente quand cette différence sera de 12 heures. En 12 heures, il y a 240 fois 3 minutes. Il faut donc 240 heures, soit 10 jours pour que les deux affichages coïncident de nouveau.

Exercice 10 : La coupe est pleine, 10 points

Il faut 1L pour remplir la vasque 1. Ensuite elle déborde équitablement dans les vasques 2 et 3qui sont pleines quand 3L ont coulé dans 1.
La vasque 5 est alimentée par 2 et 3 elle reçoit la moitié des litres suivants, tandis que 4 et 6 n'en reçoivent que le quart.
Il faut donc 2 litres supplémentaires, soit 5L en tout pour remplir la vasque 5, tandis que la vasque 4 ne sera pleine qu'au terme du 7ème litre versé dans 1.
La vasque 8 est alimentée d'abord par 5 seule, puis par 5 et 4 quand 4 est pleine.
Elle reçoit ¼ de chacun des 6ème et 7ème litres. Elle contient ½ L quand le 7ème litre est passé dans 1.
Pour les litres suivants, elle reçoit ¼ L de la vasque 5 et $\frac{1}{8}$ L de la vasque 4, soit $\frac{3}{8}$ de la quantité versée en 1. soit x cette quantité supplémentaire.



On a : $\frac{3}{8}x=\frac{1}{2}$ d'où $x=\frac{4}{3}$. Il faut donc verser $7+\frac{4}{3}$ L,

soit $\boxed{8+\frac{1}{3}\text{ L dans la vasque 1 pour remplir complètement la vasque 8}}$.

Exercices « Spécial Secondes »

Exercice 11 : Octomanie, 5 points.

En tapant 8^{88} sur une calculatrice, on obtient l'approximation $2{,}9643.. \times 10^{79}$.
C'est un nombre de 80 chiffres commençant par 2.
Une observation des premières puissances de 8 montre que leur dernier chiffre suit une période <u>8 ; 4 ; 2 ; 6</u> ; 8 ;… Pour tous les exposants multiples de 4, le dernier chiffre est 6.

Le code de Xiu est donc : 2806.

Exercice 12 : C'est pas bouclé, 7 points.

Le calcul des longueurs des segments obliques à l'aide de Pythagore permet d'exprimer les longueurs totales de chacun des laçages :

$B = 7a+7\sqrt{1+a^2}+\sqrt{49+a^2}$; $C = 7a+2+6\sqrt{4+a^2}$; $D = 7a+7+7=7a+14$

a^2 étant positif, on a les inégalités : $\sqrt{1+a^2}>1$; $\sqrt{49+a^2}>7$ et $\sqrt{4+a^2}>2$.

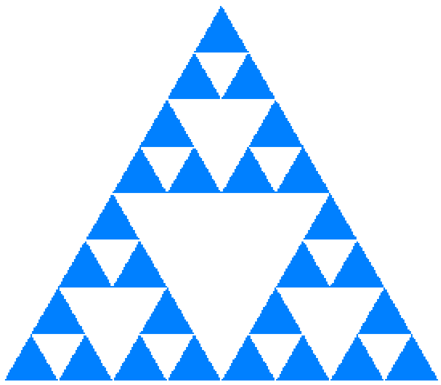
(Chacune d'elles exprime que dans un triangle rectangle, l'hypoténuse est plus longue qu'un côté de l'angle droit)

On en déduit alors aisément que $\boxed{B>D \text{ et } C>D}$.

Non demandée, la comparaison de B et C est plus difficile : on pourra utiliser l'inégalité triangulaire pour établir que B>C>D.

Exercice 13 : Que reste-t-il ?, 10 points.

Voici une dentelle de Sierpinski de rang 3.



Chaque petit triangle bleu représente 1/64 du triangle initial. L'aire de la dentelle (partie bleue) égale 27/64 de l'aire du triangle initial.
On observe qu'à chaque étape, la dentelle perd ¼ de son aire : son aire est donc multipliée par ¾ à chaque étape.

Au rang 8, il reste $\frac{3^8}{4^8}$, soit $\frac{6561}{65536}$

ou environ 10,01% de l'aire initiale.