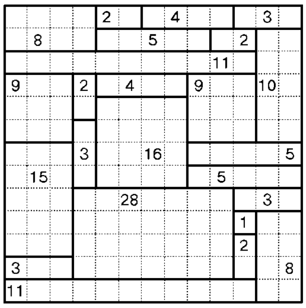
Éléments de solutions pour un corrigé de l'épreuve définitive du 7 mars 2017

Mathématiques SANS Frontières

Exercice 1 – *Des rangées dérangées* - 7 points -

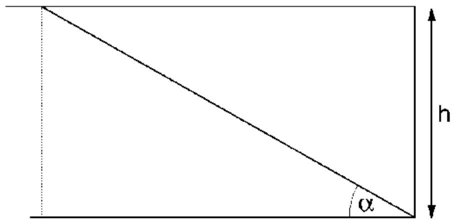
On désigne par n le nombre de chaises par rangée. La salle de réunion comporte donc $9n$ chaises.
Lors de la première conférence, il y a deux tiers de chaises occupées, soient $6n$.
Lors de la deuxième conférence, trois quarts des participants se sont inscrits, soient $4{,}5n$ chaises seront occupées.
Il faudra laisser cinq rangées complètes afin que chaque participant à la deuxième conférence ait une chaise.

Exercice 2 – *Shikaku* - 5 points -



Un peu d'observation s'impose.
On peut remarquer que le rectangle contenant 1 est déjà défini, et celui contenant 11, ne peut être qu'un long rectangle horizontal. Puis on peut continuer par le rectangle contenant 8 qui se trouve tout en bas à droite.
Lorsqu'on a démarré, l'exercice devient ludique.

Exercice 3 – *Tournicoti tournicoton* - 7 points -



Une situation paradoxale intéressante. Lorsqu'on imagine « dérouler » les guirlandes pour les poser à plat, un même angle α et une même hauteur h déterminent une même longueur de guirlande que celle-ci fasse plusieurs tours d'un pilier étroit ou peu de tours sur un pilier large, voire moins d'un tour sur un pilier très large.

Si on déroule la guirlande en gardant l'angle α, elle doit toujours atteindre la hauteur h sa longueur est donc $l = h/\sin(\alpha)$ indépendamment du diamètre de la colonne.

On a la même longueur de guirlande quel que soit le diamètre de la colonne, puisque la hauteur est la même.

Exercice 4 – *Sagrada Familia* - 5 points -

La somme des lignes et des colonnes est constante, ce qui fait déjà deux possibilités. Comme la somme des diagonales est également constante, on peut trouver une 3e possibilité. Les quatre carrés à chaque coin seront sans doute aussi assez facilement trouvés, et le total de 33 des 4 cases centrales permettra d'obtenir d'autres possibilités.
En voici certaines :
Il y en a bien d'autres …

1	14	14	4
11	7	6	9
8	10	10	5
13	2	3	15

1	14	14	4
11	7	6	9
8	10	10	5
13	2	3	15

1	14	14	4
11	7	6	9
8	10	10	5
13	2	3	15

1	14	14	4
11	7	6	9
8	10	10	5
13	2	3	15

1	14	14	4
11	7	6	9
8	10	10	5
13	2	3	15

1	14	14	4
11	7	6	9
8	10	10	5
13	2	3	15

1	14	14	4
11	7	6	9
8	10	10	5
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

1	14	14	4
11	7	6	9
8	10	10	5
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

1	14	14	4
11	7	6	9
8	10	10	5
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

Exercice 5 – *À un cheveu près* - 7 points -

La voiture doit parcourir 7,20 m (2,50 + 4,70) pendant que le camion parcourt 18 m (20 – 2) à 90 km/h.

Sa vitesse minimale devra être égale à : $\dfrac{7{,}20}{v} = \dfrac{18}{90}$ soit $v = \dfrac{7{,}20 \times 90}{18} = 36$.

La vitesse minimale sera de 36 km/h.

Exercice 6 – *Nombriliste* - 5 points –

On commence par appliquer l'algorithme, obtenant successivement : 3,2 ; 0,9 ; 8,1 ; 6,3 ; 2,7 ; 4,5 ; 0,9.
On retombe sur un nombre déjà obtenu précédemment. À partir de là, la suite sera périodique de période 5.
Le 38^{e} nombre de la liste sera le même que le troisième, c'est 8,1.
Le 2017^{e} nombre de la liste sera le même que le deuxième, soit 0,9.

Exercice 7 – *Cuboctaèdre* - 7 points -

Le cuboctaèdre a autant de faces carrées que le cube a de faces (6) et autant de faces triangulaires que le cube a de sommets (8). Le nombre total de ses faces est 6 + 8 = 14.
Pour compter ses arêtes, on compte uniquement les arêtes des faces carrées, puisqu'elles sont à chaque fois commune à un carré et un triangle il y a donc 6 × 4 = 24 arêtes.
Ses sommets sont tous placés au milieu d'une arête du cube et chaque milieu d'arête du cube est un sommet du cuboctaèdre donc leur nombre égale le nombre des arêtes du cube, soit 12.
12 – 24 + 14 = 2 ainsi la relation d'Euler $s - a + f = 2$ est bien vérifiée.
Pour le calcul du volume, le dessin suggère de calculer le volume du cube auquel on soustrait le volume des huit tétraèdres coupés en ses coins :

V = $c^3 - 8 \times \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}\times\left(\frac{c}{2}\times\frac{c}{2}\right)\times\frac{c}{2}\right] = c^3 - \frac{c^3}{6} = \frac{5c^3}{6}$ **Le volume du cuboctaèdre est égal à** $\frac{5c^3}{6}$.

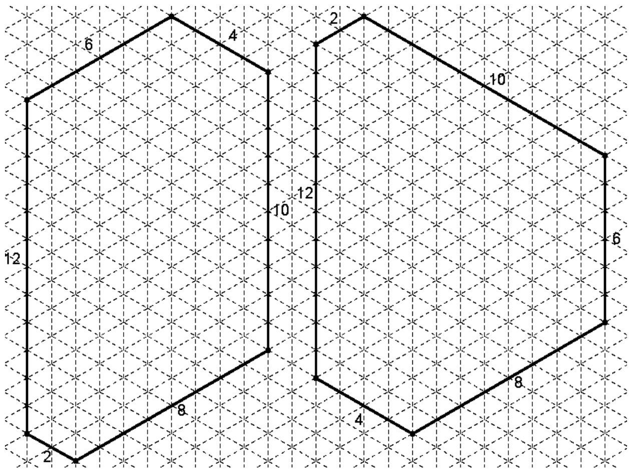
Exercice 8 – *Somme toute* - 5 points -

Les valeurs attribuées à chacun des sommets du tétraèdre sont respectivement égales à :
abc, bcd, abd et acd.

Le produit de ces quatre valeurs est égal à $(abcd)^3$ qui est égal, nous dit l'énoncé, à 27 000 = 30^3.

On en déduit que $abcd = 30 = 1\times 2\times 3\times 5$.

Les quatre nombres cherchés sont 1 ; 2 ; 3 et 5.



Exercice 9 – *Coincer la bulle* - 7 points -

On remarquera que deux côtés opposés sont toujours parallèles (en considérant les angles de 120°). D'où la simplification en prenant un papier « triangulé ».
Ci-contre les deux solutions possibles.

Exercice 10 – *Vive Thalès* - 10 points -

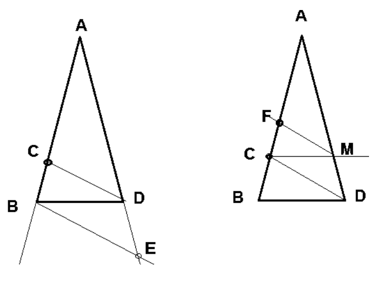
Dans le triangle ABE d'après le théorème de Thalès,

on a : $\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AD}$.

Comme AB = AD = 1 , on obtient : $\frac{1}{AC}$ = AE.

On mène une parallèle à (BD) passant par C qui coupe (AD) en M, puis on mène par M une parallèle à (CD) qui recoupe (AB) en F.
Alors AM = AC et d'après le théorème de Thalès :

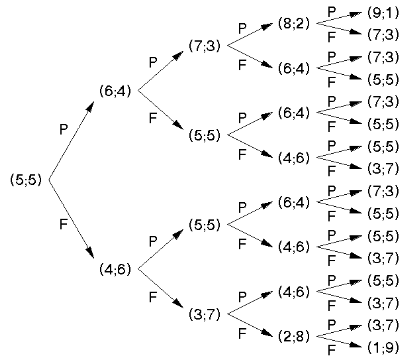
$\frac{AF}{AC} = \frac{AM}{AD}$ c'est à dire $\frac{AF}{AC} = \frac{AC}{1}$ donc AF = AC².



À noter que si C est au-delà de B, F passe au-delà de C, mais les égalités restent vraies.

Spécial seconde

Exercice 11 – *À pile ou face* - 5 points -



Un arbre de probabilité se prête bien à ce type de situation. Le P représente Piera qui gagne et le F Frank qui gagne. Les résultats de tirages sont sous la forme de couple (nombre de bonbons de Piera ; nombre de bonbons de Frank).

On constate que Frank a 5 chances sur 16 d'avoir plus de bonbons que Piera.

On peut également préciser que Piera a les mêmes chances que Frank de gagner, mais que la probabilité qu'aucun des deux ne gagne est encore plus forte, avec 6 chances sur 16.

Exercice 12 – *Factorielle* - 7 points -

On considère la décomposition de 200!.
Elle est unique et elle compte plus de facteurs 2 que de facteurs 5 parce qu'il y a largement plus d'entiers pairs que de multiples de 5 inférieurs à 200. Pour fabriquer un facteur 10, il faut regrouper un facteur 2 et un facteur 5. Comme les facteurs 2 sont en surnombre, il suffit de compter les facteurs 5.
Il y a 40 multiples de 5 inférieurs (ou égal) à 200, mais les multiples de 25 comptent deux facteurs 5. Ceux-là sont au nombre de 8. Et puis il y a aussi le 125 qui compte trois facteurs 5. 40+8+1 =49. On peut regrouper 49 fois un facteur 2 et un facteur 5.
Le nombre de zéros qui terminent l'écriture décimale de 200! est 49.

Exercice 13 pour les secondes GT – *Lots libres* - 10 points -

Le terrain **1** a pour aire $12 \times 28 = 336$; la condition n'est pas vérifiée. Il ne convient pas.
Pour le terrain **2,** soit A son aire :

$$\frac{615+519+10\times 27}{27} = \frac{336+644+A}{28}$$

et donc A = 476.
Le terrain **2** ne convient pas non plus.
Pour le terrain **3** : soit x sa longueur et A son aire, on obtient :

$$\begin{cases} A+720=40x \\ \dfrac{A+420}{x}=\dfrac{600}{20} \end{cases} \text{ d'où } \begin{cases} A+720=40x \\ A+420=30x \end{cases}$$

et donc par soustraction $x = 30$ et finalement $A = 480$.
Le terrain **3** ne convient pas non plus.
Aucun des trois terrains ne répond aux attentes de Mehdi.

Exercice 13 pour les secondes Pro – *À fond les décibels* - 10 points -

On accepte la solution 120 dB = 60 + 20*3 et donc le nombre de Smartphones = 2^{20} = 1 048 576.
Mais on peut surtout utiliser le tableur qui nous donne :

1 Smartphone	60dB
2	63
4	66
8	69
16	72
32	75
64	78
128	81
256	84
512	87
1024	90
2048	93
4096	96
8192	99
16384	102
32768	105
65536	108
131072	111
262144	114
524288	117
1048576	120