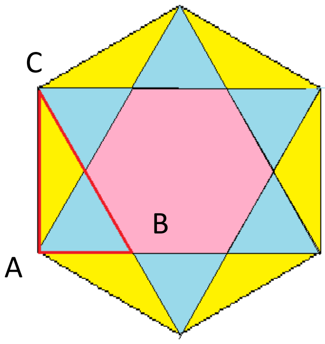
Eléments de solutions pour un corrigé de l'épreuve définitive 2020

<u>Exercice 1 – *A qui le tour* - 7 points –</u>

Le temps d'occupation des salles de bain est égal en tout à 78 minutes. Pour chacune des deux salles de bain, il faut trouver le temps d'occupation le plus proche de 39 minutes.
La meilleure répartition est la suivante :
Une salle de bain est occupée pour 21 + 13 + 7 = 41 minutes par Mme Propre, Tristan et Nora.
L'autre salle de bain est occupée pour 15 + 14 + 8 = 37 minutes par M. Propre, Justin et Samuel.
À 6 h 59 (41 + 20 = 61 minutes avant 8 heures), Mme Propre (ou Tristan ou Nora) doit aller dans la première salle de bain.
À 7 h 03 (37 + 20 = 57 minutes avant 8 heures), M. Propre (ou Justine ou Samuel) doit aller dans la deuxième salle de bain.



<u>Exercice 2 – *Hexaordinaire* - 5 points –</u>

L'assemblage est un hexagone semblable à chacun des hexagones initiaux.
Si le rapport des aires est 3 le rapport des côtés est $\sqrt{3}$.
La longueur du côté du grand hexagone est $4\sqrt{3}$ cm.
<u>Remarque</u> : On peut aussi calculer la longueur AC par Pythagore dans le triangle rectangle ABC de côtés AB = 4 et BC = 8.

<u>Exercice 3 – *Mentaliste* - 7 points –</u>

À la troisième étape de l'algorithme proposé par Elyne, on peut choisir un facteur multiplicatif (3, 4, 5 ou 6), ce qui donne quatre possibilités qui sont représentées dans les colonnes de la grille ci-dessous :

Choix du nombre de départ	x	x	x	x
Multiplication avec 21	$21x$	$21x$	$21x$	$21x$
Choix du facteur multiplicatif	**3**	**4**	**5**	**6**
Multiplication avec ce facteur	$21x \times \mathbf{3} = 63x$	$21x \times \mathbf{4} = 84x$	$21x \times \mathbf{5} = 105x$	$21x \times \mathbf{6} = 126x$
Division par 4	$15{,}75x$	$21x$	$26{,}25x$	$31{,}5x$
Division par le nombre choisi (x)	15,75	21	26,25	31,5
Addition du nombre choisi (x)	$\mathbf{x + 15{,}75}$	$\mathbf{x + 21}$	$\mathbf{x + 26{,}25}$	$\mathbf{x + 31{,}5}$

Si la partie décimale du résultat affiché à la calculatrice et annoncé par Thomas est :
- 75, alors Élyne enlève 15 à la partie entière du résultat.
- 0, c'est-à-dire que le résultat est entier, alors Élyne enlève 21 au résultat.
- 25, alors Élyne enlève 26 à la partie entière du résultat.
- 5, alors Élyne enlève 31 à la partie entière du résultat.

Mathématiques SANS Frontières

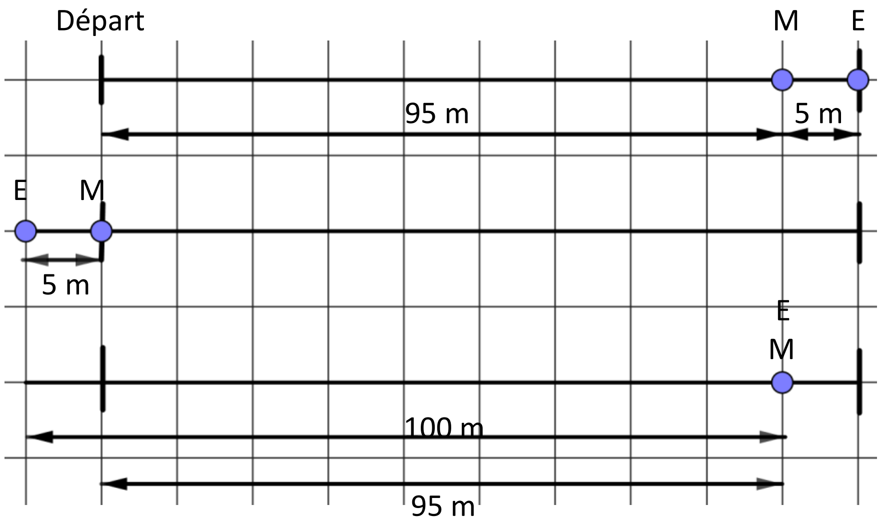
Exercice 4 –*Couru d’avance* - 5 points –

Lors de la 1re course de 100 m, Éloi (E) l’emporte avec 5 m d’avance sur Martin (M).
On peut donc en déduire qu’**Éloi est plus rapide que Martin** et que pendant **qu’il parcourt 100 m**, **Martin lui n’en parcourt que 95 m.**
Lors de la 2e course, Éloi démarre la course 5 m avant la ligne de départ.
Pendant qu’il parcourt 100 m, Martin parcourt 95 m.
Ils se retrouvent donc **côte à côte** à 95 m de la ligne de départ. Éloi, **étant plus rapide que Martin**, il parcourra les cinq derniers mètres plus rapidement que Martin, et gagnera ainsi la 2e course.

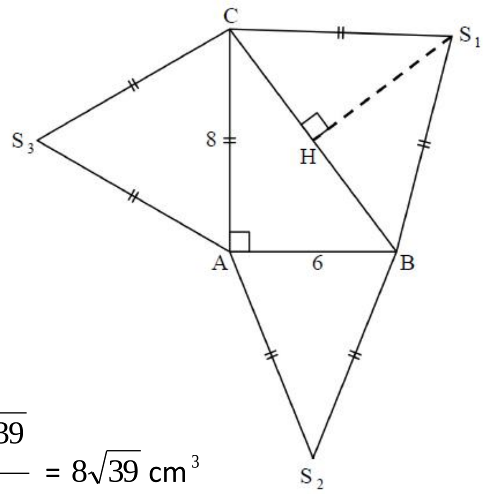
1re course :

Départ 2e course :

Position intermédiaire :



Exercice 5 – *Multi-plié* - 7 points –



Le patron est représenté sur la figure ci-contre.
La hauteur de ce tétraèdre est représentée par le segment [S_1H].
H est le milieu de [BC] car le triangle BCS_1 est isocèle en S_1 donc la hauteur et la médiatrice issue de S_1 sont confondues.
À l’aide du théorème de Pythagore, on détermine la longueur BC = 10 cm, puis la longueur S_1H :

$S_1H = \sqrt{S_1B^2 - HB^2} = \sqrt{8^2 - 5^2} = \sqrt{39}$ cm.

L’aire de la base de ce tétraèdre correspond à l’aire du triangle ABC.

Volume de ce tétraèdre = $\dfrac{\text{aire du triangle ABC} \times S_1H}{3} = \dfrac{\dfrac{8\times 6}{2}\times\sqrt{39}}{3} = 8\sqrt{39}$ cm^3

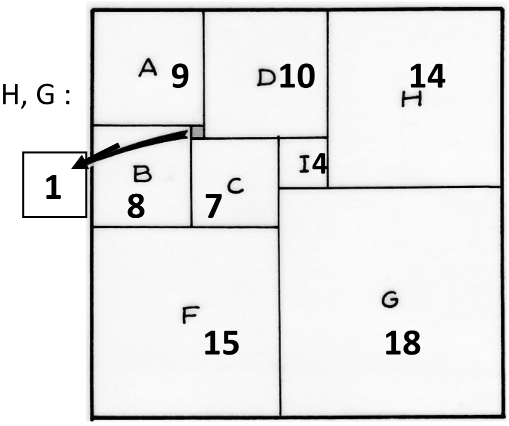
Le volume arrondi à l’unité près de ce tétraèdre est donc 50 cm^3.

Justification du fait que [S_1H] représente la hauteur de ce tétraèdre.

Soit S le sommet du tétraèdre SABC. On sait que la droite (SH) est perpendiculaire à (BC) et, à l’aide de la réciproque du théorème de Pythagore, on montre que le triangle SHA est rectangle en H.
On en déduit que la droite (SH) est perpendiculaire aux droites (BC) et (AH) qui sont deux droites sécantes du plan (ABC). On peut donc dire que la droite (SH) est perpendiculaire au plan (ABC) et par conséquent que [SH] est bien la hauteur du tétraèdre SABC relative à la base ABC.

Mathématiques SANS Frontières

Exercice 6 – *Carrés de jardin* - 5 points –



On calcule successivement les côtés des carrés A, B, E, C, D, F, I, H, G :
côté du carré A = $\sqrt{81} = 9$ → côté du carré B = $\sqrt{64} = 8$ etc.

Le nombre inscrit dans chacun des carrés
indique la longueur de son côté.
La longueur du grand rectangle est alors 15 + 18 = 33
et sa largeur 18 + 14 = 32.
Le jardin n'est pas un carré.

Exercice 7 – *Et pourtant elle tourne* - 7 points –

Une roue entraîne le changement de sens de rotation pour la roue suivante. Toutes les roues de numéros impairs tournent dans le sens horaire et toutes les roues de numéros pairs tournent dans le sens trigonométrique.
Donc les roues n°1 et n°13 tournent dans le sens horaire.

Dans l'ordre croissant, les roues tournent successivement les unes après les autres 7 fois moins vite et dans l'ordre décroissant, elles tournent 7 fois plus vite.
La roue n°7 fait un tour en 24 h, donc la roue n°1 fait 7^6 tours en 24 h soit 117 649 tours en 24 h.
$\frac{117649}{24\times60\times60} \simeq 1{,}36$. **La roue n°1 fait environ 1,36 tour par seconde.**
La roue n°13 fait un tour en 7^6 jours, soit en 117 649 jours.
$\frac{117649}{365} \simeq 322{,}326\ldots$ **La roue n°13 met donc un peu plus de 322 ans pour effectuer un tour.**

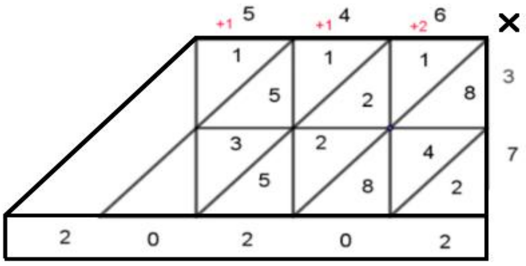
Exercice 8 – *Déchiffrer des lettres* - 5 points –

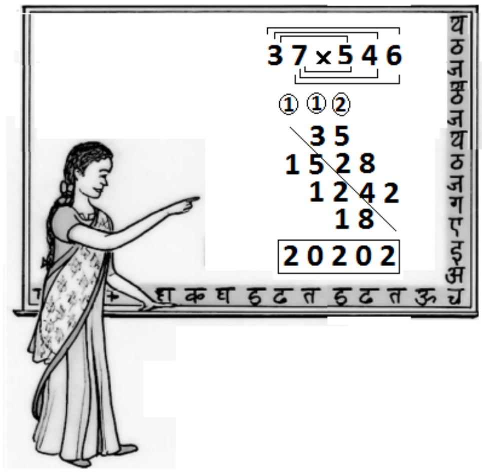
A^2 = CA et H^2 = BH. Les seuls nombres entre 0 et 9 dont les carrés se terminent par le même chiffre que le nombre initial sont 5 et 6 ($5^2 = 25$ et $6^2 = 36$).
Comme A est aussi le dernier chiffre des produits de A par B et de A par C, on peut en déduire que **A = 5,** et donc **H = 6**. Il s'ensuit que **C = 2 et B = 3.**
Le chiffre des unités du produit de A par H est I. Donc **I = 0.**
B^2 = D => **D = 9**. D^2 = FG => **F = 8** et **G = 1.** A × D = EA => **E = 4**.
B × D = CJ => **J = 7**.
Conclusion : **A = 5 ; B = 3 ; C = 2 ; D = 9 ; E = 4 ; F = 8 ; G = 1 ; H = 6 ; I = 0 et J = 7.**

×	5	3	9	6
5	25	15	45	30
3	15	9	27	18
9	45	27	81	54
6	30	18	54	36

Exercice 9 – *Multiplications sans frontières* - 7 points –

Dans la présentation indienne, on remplit les cases du tableau en effectuant les multiplications. Par exemple en bas à droite on obtient 42 en faisant 6×7. Le résultat final se trouve en faisant les additions en diagonale en commençant par la droite.

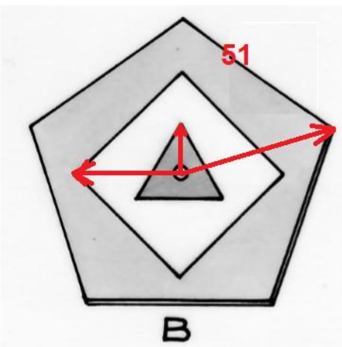




Dans la multiplication « *per gelosia* », il s'agit de placer les résultats des multiplications en tenant compte du rang qu'occupe chaque chiffre. Par exemple 6 × 3 correspond à la multiplication d'unités par des dizaines donc on obtient 18 dizaines. Le résultat final se trouve en faisant les additions en colonne.

Dizaines de mille	Unités de mille	Centaines	Dizaines	Unités
			3	7
		5	4	6
			4	2
		1	8	
		2	8	
	1	2		
	3	5		
1	5			
2	0	2	0	2

Exercice 10 – *à la bonne heure* - 10 points –



On cherche un nombre congru à 2 modulo 3, à 1 modulo 4 et à 4 modulo 5. 29 est le premier qui convient.
29 minutes se sont écoulées depuis la position initiale.

Le reste de la division de 51 par 3 est 0.
Le reste de la division de 21 par 4 est 3 et
Le reste de la division de 51 par 5 est 1, d'où la figure :

Pour fabriquer un minuteur qui retrouve sa position initiale en 105 min, **il faut un triangle, un pentagone et un heptagone** car $3 \times 5 \times 7 = 105$.

Exercice 11 – *Ay Caramba* - 5 points –

Les deux premiers tracés permettent de déterminer la longueur et la hauteur des rectangles. Pretty parcourt 5L + 4H = 185 et Jerry parcourt 5L + 2H = 145, d'où par soustraction H = 20 cm et L = 21 cm. Speedy utilise aussi des diagonales de longueurs égales à D = 29 cm (par Pythagore $20^2 + 21^2 = 29^2$) .
La longueur du trajet de Speedy est : 2L + 4H + 3D = 209 cm.

Exercice 12 – *Corolle aire* – 7 points –

Soit r le rayon en cm du cercle intérieur. On a donc OM = r, AB = 4 cm donc AM = 2 cm.
D'après le théorème de Pythagore : OA = $\sqrt{r^2+2^2}$ = $\sqrt{r^2+4}$
L'aire de la couronne circulaire, en cm², est : $\pi\left(\sqrt{r^2+4}\right)^2 - \pi r^2 = \pi\,(r^2+4) - \pi r^2 = 4\pi$
L'aire de la couronne circulaire est constante, indépendante du rayon.
Quelques soient les rayons des cercles, **les deux couronnes circulaires ont la même aire !**

Exercice 13 pour les secondes GT – *Play Bac* – 10 points –

Soit h la hauteur d'eau au départ.
Le volume d'eau au départ, en cm^3, est de $60 \times 40 \times h = 2\,400 \times h$.
Et quand Jean a déposé son premier cube, la hauteur de l'eau augmente de 3 cm, donc on peut exprimer le même volume d'eau d'une autre manière :
$(60 \times 40 - 20 \times 20) \times (h + 3) = 2\,000 \times (h + 3) = 2\,000 \times h + 6\,000$.
On obtient une équation : $2\,400 \times h = 2\,000 \times h + 6\,000$ d'où : **h = 15 cm**.
Le volume d'eau au départ, en cm^3, est : $2\,400 \times 15 = 36\,000$.
Le volume du bac est de 72 000 cm^3.
À chaque cube déposé, le volume augmente de 8 000 cm^3.
Le 5^e pavé déposé fera déborder l'eau du bac. C'est celui déposé par Jean.

Exercice 13 pour les secondes Pro – *Se plier en trois* – 10 points –

En utilisant geogebra, on construit un carré qui peut s'agrandir si on déplace un sommet (par exemple en plaçant un sommet sur la droite $y = x$).
On agrandit le carré pour avoir AJ = 10 cm et on trouve la longueur du côté du carré, soit environ **8,9 cm**.
Les graduations à l'intersection sont :
2 sur la première partie et **26** pour la troisième.